О ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ ГРАФАХ СТЕПЕНИ ТРИ БЕЗ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ

Э. Я. ГРИНБЕРГ

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Дается необходимое условие для наличия гамильтонова цикла у плоского графа. Строятся примеры однородных плоских графов степени три, не имеющих гамильтоновых циклов.

Darbā dots nepieciešamais nosacījums, lai plakanam grafam būtu Hamiltona cikls. Kā piemēri apskatīti plakani trešās pakāpes homogeni grafi bez Hamiltona cikliem.

В настоящей статье словом «граф» обозначаем конечный связный неориентированный граф без петель, кратных ребер и вершин первой степени.

Будем называть нетривиальным разрезом графа любое множество ребер, после удаления которых граф распадается на две связные компоненты, каждая из которых имеет не менее трех вершин. Минимальное число ребер, содержащихся в нетривиальном разрезе, будем называть квазисвязностью. Наконец, конечный однородный плоский граф степени три будем называть картой, если его квазисвязность не меньше двух, т. е. он не имеет перешейков. Хорошо известно, что карта может и не иметь гамильтоновых циклов. Однако для единственного примера карты без гамильтоновых циклов, который повторно приводится в литературе [1, стр. 210; 2, стр. 57], квазисвязность равна только трем (при этом имеется три минимальных нетривиальных разреза).

С другой стороны, наиболее интересны те карты, у которых квазисвязность имеет свое наибольшее значение — пять, хотя бы как единственные возможные контрпримеры для гипотезы четырех красок. Мы установим одно свойство плоских графов, имеющих гамильтонов цикл, которое позволит построить карты квазисвязности пять или четыре, не имеющие таких циклов.

Рассмотрим плоскую реализацию графа G (т. е. плоский топологический граф по Бержу, изображающий G) с определенным гамильтоновым циклом H. Ребра, не входящие в H, будем называть хордами. В силу плоскостности рассматриваемой реализации, H является замкнутой жордановой кривой без самопересечений и, следовательно, делит всю плоскость на две части — внешнюю, содержащую бесконечно удаленную точку плоскости, и внутреннюю. Каждая хорда имеет конечные вершины на H, а в остальном целиком проходит только по внешней или внутренней части плоскости. Эти хорды, а также грани, т. е. области, на которые они делят эти две части плоскости, можно соответственно называть внешними и внутренними.

Весом грани, ограниченной элементарным циклом, будем называть число, на две единицы меньшее длины граничного цикла, т. е. числа вершин грани. Если рассматривается ν граней, сумма длин граничных циклов которых равна Σ, то сумма S их весов может быть представлена в виде

$$S = \Sigma - 2\nu. \tag{1}$$

Пусть теперь h — длина рассматриваемого гамильтонова цикла H, S_1 и S_2 — соответственно суммы весов всех внутренних и внешних граней. Тогда

$$S_1 = S_2 = h - 2. \tag{2}$$

Для установления этих соотношений удалим все хорды. Тогда (2) имеет место по определению. Будем теперь по одной восстанавливать все хорды. При восстановлении очередной хорды в одной из сумм S_1, S_2 все слагаемые и сама сумма остаются без изменений. Для другой суммы рассмотрим изменения в правой части (1). Число ν увеличится на единицу, так как одна из областей — A — проведенной хордой разделяется на две новые области. Сумма Σ увеличится на 2, так как все ребра, входящие в границу A, входят и в границу точно одной из новых областей, а проведенная хорда входит в обе эти границы. Таким образом, значение левой части не меняется. Следовательно, соотношение (2) остается в силе и после восстановления всех хорд.

Если множество всех граней плоской реализации графа разбито на два подмножества с одинаковыми суммарными весами S_1 и S_2, т. е.

$$S_1 = S_2, \tag{3}$$

то такое разбиение можно назвать изобарным, а множество всех ребер, одновременно входящих в граничные циклы граней из двух подмножеств разбиения, — границей этого разбиения. Тогда полученный результат можно сформулировать в следующем виде.

Т е о р е м а. Если плоский граф G имеет гамильтонов цикл H, то для любой его плоской реализации существует изобарное разбиение, границей которого является H.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, ясно, что сформулированная теорема остается в силе и для плоских мультиграфов (разумеется, без петель, перешейков и вершин первой степени). Во-вторых, для наших целей существенно именно соотношение (3), так как соотношение

$$S_1 + S_2 = 2\,(h - 2),$$

вытекающее из второго знака равенства в (2), является просто некоторым вариантом формулы Эйлера. Наконец, отсутствие изобарных разбиений может служить довольно удобным достаточным условием отсутствия гамильтоновых циклов. Если же такие разбиения имеются, то условия сформулированной теоремы вряд ли целесообразно использовать для решения вопроса о наличии гамильтонова цикла у данного плоского графа или для нахождения таких циклов. Действительно, число возможных изобарных разбиений может быть большим, а исследование их границ может быть не проще других видов перебора, используемого для решения вопросов о гамильтоновых циклах.

Польза от теоремы в другом: если заранее ограничить набор используемых весов граней, то можно построить плоские реализации, имеющие одно из следующих свойств:

а) нет изобарных разбиений;

б) имеются изобарные разбиения, но ни одно из них не имеет границей гамильтонов цикл.

Полученные плоские графы, согласно теореме, не будут иметь гамильтоновых циклов. Карту со свойством а) можно получить, если для ее построения использовать точно одну грань с весом, не кратным трем; произвольное число граней с весом, кратным трем, т. е. граней, имеющих $3k + 2$ вершин с целым k. Тогда при любом разбиении множества всех граней на два подмножества суммарный вес лишь для одного из них будет кратным трем. Изобарных разбиений, следовательно, не будет.

Для получения карт со свойством б) можно взять 3 грани с общей вершиной x и весами, сравнимыми по модулю 3, но не кратными трем, а все остальные грани, как и выше, с весами, кратными трем. Тогда для любого изобарного разбиения 3 первые грани должны входить в одно подмножество, граница разбиения не будет проходить через x и, следовательно, не будет гамильтоновым циклом.

Нам кажется, что само построение карты G удобнее осуществить для двойственного графа искомой карты, т. е. плоской триангуляции G'. Гамильтонову циклу H в G соответствует разрез H' в G', отделяющий друг от друга два дерева, которые можно взять в качестве бихроматических компонент для получения правильной раскраски вершин G'. Если же у G нет гамильтонова цикла, то у

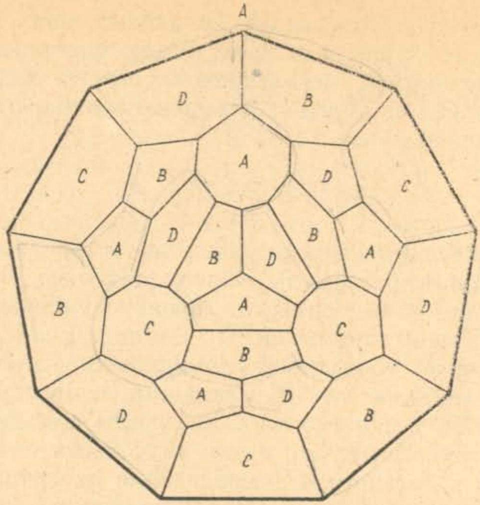

Рис. 1. Карта без гамильтоновых циклов: $f_9 = 1$; $f_5 = 21$; $f_6 = 3$; $f = 25$; $q = 5$.

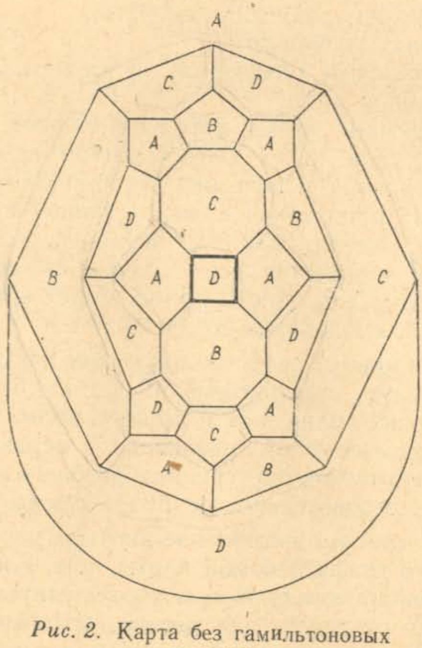

Рис. 2. Карта без гамильтоновых циклов: $f_4 = 1$; $f_5 = 18$; $f_6 = 4$; $f = 23$; $q = 4$.

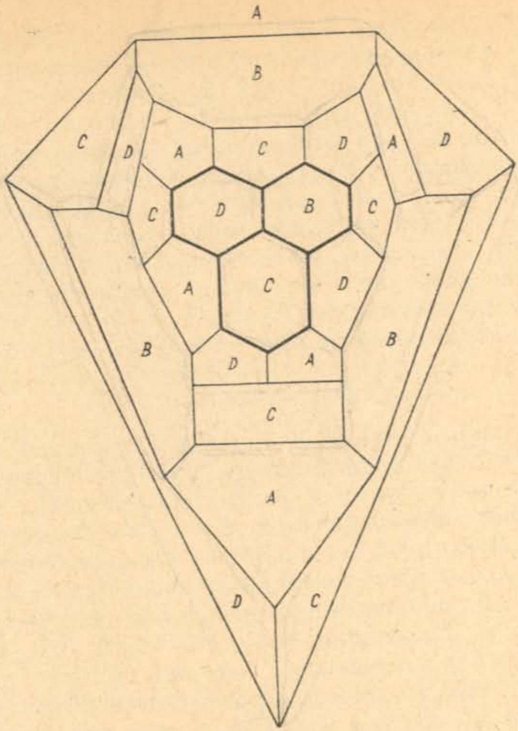

Рис. 3. Карта без гамильтоновых циклов: $f_4 = 3$; $f_5 = 18$; $f_8 = 3$; $f = 24$; $q = 5$.

G' нет и таких разрезов; при правильной раскраске вершин G' любая бихроматическая компонента не является деревом, а имеет четный цикл или не связна, или и то, и другое. Длине граничных циклов граней G соответствуют степени вершин в G', так что задача сводится к построению плоских триангуляций с произвольным числом вершин степени 5, 8, 11, ... и одной вершиной степени, не сравнимой с 2 по модулю 3 в случае а), или трех попарно смежных вершин со степенями, сравнимыми между собой, но не сравнимыми с 2 по модулю 3 в случае б).

На рис. 1 — 3 даны некоторые из карт G, полученных указанным путем. Границы «специальных» граней, веса которых не кратны трем, обведены жирной линией. Через f_i обозначено число граней с i вершинами, через f — общее число граней; q — квазисвязность; A, B, C, D — цвета одной из правильных раскрасок граней четырьмя цветами. Карта, представленная на рис. 1, двойственна триангуляции рис. 1, I в [3]. Карты, представленные на рис. 1 и 2, отвечают случаю а), на рис. 3 — случаю б). Две последние карты (рис. 2, 3) среди карт, построенных нами описанным способом, имеют наименьшие f для $q = 4$ и 5. Интересно было бы установить фактические минимальные значения для карт без гамильтоновых циклов с $q = 3$, 4 или 5. Так как карта из [1 и 2] имеет $f = 25$ при $q = 3$, то верхние пределы для этих минимальных значений известны.

Для общего числа граней, ребер, вершин или максимального числа вершин одной грани у карт без гамильтонова цикла нет верхних пределов. Действительно, можно указать приемы построения таких карт, у которых любое из указанных чисел имеет произвольно большое значение. Один такой прием построения опишем для дуальной триангуляции G'.

Выбираем натуральные числа α и β с условием

$$\beta = 2 \pmod 3). \tag{4}$$

Строим элементарный цикл C_1 длины $3^\alpha\beta$, внутри его — элементарный цикл C_0 той же длины, внутри которого берем вершину x, которую соединяем ребрами со всеми вершинами C_0. Далее зигзагообразно триангулируем полосу между C_0 и C_1: соединяем ребром одну вершину C_0 с одной вершиной C_1, затем строим новые ребра, перемещая конечные точки попеременно вдоль C_0 и C_1 на одно ребро в одном и том же направлении. В результате получаем триангуляцию внутренности C_1, вершина x имеет степень $3^\alpha\beta$, все вершины C_0 имеют степень 5, а к вершинам C_1 изнутри подходят по два ребра. Далее α однотипными шагами мы строим части искомого G', лежащие между циклами C_i и C_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, \alpha$), а именно разбиваем все вершины C_i на тройки следующих друг за другом вершин. Вершинам каждой тройки присваиваем степени 8, 5, 8 и, согласно схеме (рис. 4), строим переходы к C_{i+1} (у вершин указаны их степени).

Возможность разбиения вершин на тройки и получения предписанных значений степеней обеспечивают следующие свойства наших циклов:

1) цикл C_i имеет длину $3^{\alpha-i+1}4^{i-1}\beta$;

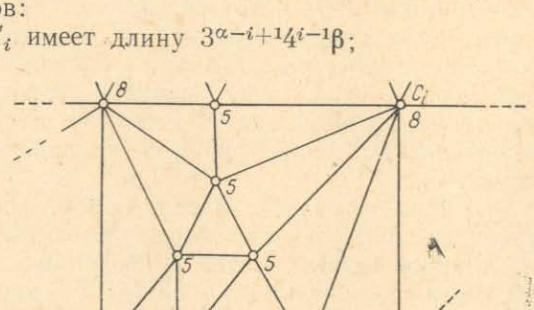

Рис. 4. Схема построения графа G'.

2) к вершинам C_i изнутри подходят два ребра. Наличие же этих свойств следует из того, что они имеют место при $i = 1$, а применяемая конструкция сохраняет их при переходе от i к $i+1$.

Мы заканчиваем построение триангуляции, соединяя все вершины $C_{\alpha+1}$ с вершиной z, взятой вне $C_{\alpha+1}$. Степень z будет равна $4^\alpha\beta$, и в силу (4) мы имеем

$$4^\alpha \beta \equiv \beta \equiv 2 \pmod 3.$$

Если теперь перейти к карте G, двойственной к G', то грань, соответствующая x, будет иметь $3^\alpha\beta$ вершин, следовательно, вес $3^\alpha\beta - 2$, не кратный трем. Веса же всех остальных граней равны 3, 6 или $4^\alpha\beta - 2$ и, следовательно, кратны трем, поэтому нет ни изобарных разбиений, ни гамильтоновых циклов.

Нетрудно видеть, что все графы G', получаемые указанным способом, являются четыреххроматическими.

В заключение отметим, что из установленной теоремы легко получить аналогичную формулировку для карт, являющихся $3H$-графами. Как известно, однородный граф степени 3 называют $3H$-графом, если существует такая правильная раскраска ребер тремя цветами, что ребра любых двух цветов образуют гамильтонов цикл.

Пусть карта G является $3H$-графом и H_1, H_2, H_3 — определенные гамильтоновы циклы, фигурирующие в определении $3H$-графа.

Известно (и нетрудно проверить), что имеют место следующие свойства:

правильная раскраска граней G цветами 0, 1, 2, 3 получается, если номер цвета каждой грани равен числу циклов H_i, внутри которых находится эта грань;

при подходящей нумерации цветов для ребер фигурирующая в определении $3H$-графа правильная раскраска ребер цветами 0, 1, 2 получается, если ребро, к которому прилегают грани с цветами i и j, получает цвет с номером $|i + j - 3|$. Пусть, наконец, σ_i — сумма весов всех граней с цветом i. Применяя теорему к каждому из гамильтоновых циклов H_j, видим, что сумма двух любых из величин σ_i равна сумме двух остальных, следовательно, все σ_i имеют одно и то же значение.

Таким образом, имеет место

Следствие. Если карта является $3H$-графом, то существует такое разбиение множества всех граней на четыре подмножества A_i ($i = 0, 1, 2, 3$), имеющих одинаковый суммарный вес, что раскраска всех граней подмножества A_i в цвет i правильна и имеет все указанные выше свойства.

В качестве примера карты, являющейся $3H$-графом, можно указать на проекцию додекаэдра, у которой веса всех граней равны 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б е р ж. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.
2. O. O r e. Theory of graphs. Providence, 1962.
3. Э. Я. Г р и н б е р г, И. Г. И л з и н я. О раскраске вершин неориентированных графов. — Автоматика и вычислительная техника, 7. Рига, «Зинатне», 1964.

E. GRINBERG

ON PLANAR GOMOGENOUS GRAPHS DEGREE THREE WITHOUT HAMILTON CIRCUITS

Annotation

A necessary condition for Hamilton circuits of a planar graph is given in this paper.

There are given examples of gomogenous planar graphs degree three having no Hamilton circuits.

Поступила 2 VIII 1967 г.