Ar ko darbojamies matemātikā. Pašdefinējošs teksts

Dainis Zeps
dainize@mii.lu.lv
Matemātikas un Informātikas institūts
Latvijas Universitāte
2008. jūnijs

Saturs

Ievads

Pazīstamais fiziķis teorētiķis Lī Smolins grāmatā (Smolin, Three Roads to Quantum Gravity 2001) izsaka ideju, ka visums nesastāv no lietām, bet procesiem [The universe is made of processes, not things]. Varētu likties, ka tā ir ļoti oriģināla ideja. Ideja ir tiešām laba, bet līdzīgi jau ir sprieduši daudzi, kaut vai Kants, norādot, ka viss, ko mēs par lietu varam uzzināt, ir prāta konstrukcija vai rekonstrukcija [kā mums labāk patiks izteikties], ka pati lieta paliek *in se*, t.i., tā mums piejama nav.

Fizikā matemātiskais aparāts spēlē novērotāja lomu (Zeps, Matemātiskais prāts un kognitīvā mašīna, 2008), t.i., caur to mēs redzam universu vai vismaz universu kā procesus, kā to gribētu Smolins. Viss cits, ko mēs gribētu novērot visumā bez matemātikas, nav lielas ievērības cienīgs. Protams, paliek jautājums, ko mēs novērojam ar fizikālo eksperimentu, bet, ja pamanām, ka mūsu redze kā arī citi kognitīvie aparāti tāpat kā fizikālie instrumenti,kas paplašina mūsu kognitīvos aparātus, precīzi strādā pateicoties matemātiskajiem invariantiem, kas ir to funkcionalitātes pamatā, tad pie šī paša uzstādījuma paliekam.

Šāds skats uz matemātiku kā novērotāju fizikā palīdz uzlūkot matemātiku it kā no citas puses, kur tā arī ir ieraugāma kā rekonstrukciju mehānisms, kur rekonstrukciju veidojam izmantojot vienu meta-operatoru – reprezentāciju.

Tālākais teksts nav uzlūkojams kā kāda definīcija, bet kā pašdefinējošs teksts, t.i., ja lasītājs te saskata kādu jēgu, tad tas ir arī šī teksta saturs; ja tādu jēgu nesaskata, tad tāda te arī nav.

Reprezentācijas

Matemātikā nav nekā cita kā tikai reprezentācijas.

Kaut kādu A reprezentē kaut kāds B un to pierakstām formā A=B, ja lietojam Zeilbergeram (Petkovšek, Wilf, & Zeilberger, 1997) tuvāku apzīmējumu, vai, lai parādītu attiecības nesimetriskumu, A=>B. Mēs vēl lietosim apzīmējumu <Rep: A, B>, kas pasacīs, ka A ir reprezentēts ar B, lietojot reprezentēšanas procedūru Rep. Šī apzīmējuma cita nozīme mums parādīsies vēlāk.

Ja A ir skaitlis, tad B var būt šis skaitlis decimālajā skaitīšanas sistēmā, utm.

Invarianti

Matemātikā nav nekā cita kā tikai invarianti.

Invariantu I reprezentē teorēma T un pierakstām I=T. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:I,T>.

Parasti matemātiskās disciplīnas nenosauc tos savus invariantus, ar kuriem tās darbojas visaugstākā līmenī. Zemākos līmeņos tie parādās tieši kā matemātiski objekti, kā vienkāršu piemēru minot procedūru pierādījumus.

Teorēmas

Matemātikā nav nekā cita kā tikai teorēmas.

Teorēmu T reprezentē teorēmas pierādījums P un pierakstām T=P. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:T,P>.

Aksiomas, postulātus, matemātiskus pamatpieņēmumus mēs varam viegli uzlūkot kā teorēmu speciālus gadījumus. Ja tīk, P varam pieņemt kā True.

Teorēmu pierādījumi

Matemātikā nav nekā cita kā tikai teorēmu pierādījumi.

Teorēmas pierādījumu P reprezentē matemātiska izteiksme E un pierakstām P=E. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:P,E>.

Matemātiska izteiksme mums būs izteiksme tradicionālajā nozīmē vai matemātisks teksts, ja, piemēram, mums tas kvalificējas kā teorēmas pierādījums.

Matemātiskas izteiksmes un teksti

Matemātikā nav nekā cita kā matemātiskas izteiksmes un teksti.

Matemātiskas izteiksmes un tekstus E reprezentē matemātiskas definīcijas D un pierakstām E=D. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:E,D>.

Mēs uztveram matemātisku tekstu kā universālu kategoriju, kas var saturēt visu, ko matemātika lieto, bet tā nozīmi determinēs un virzīs definējumi.

Definējumi

Matemātikā nav nekā cita kā definīcijas un definējumi.

Definīciju D reprezentē ģeneriskie lielumi G un pierakstām D=G. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:D,G>.

Ģeneriskie lielumi

Matemātikā nav nekā cita kā ģeneriskie lielumi.

Ģenerisko lielumu G reprezentē matemātiskie pamatelementi El un pierakstām G=El. Ja mākam reprezentāciju raksturot kā rep, sakām <rep:G,El>.

Veseli skaitļi ir ģenerisks lielums, kurus var ģenerēt no viena skaitļa, teiksim, 1.

Matemātiskie pamatelementi un darbības

Matemātikā viss atvasināts no pamatelementiem. To saimei varam pievienot jebkuru mūsu izgudrotu jaunu matemātisku konstrukciju un tālāk lietot ka matemātikas pamatelementu.

Darbības ir kādas mums tradicionālās kā pamatdarbības. To saimei varam pievienot jebkādas mūsu jaunizgudrotas darbības.

Pitagora skaitļi

Līdz šim mēs runājām par mums tradicionālu matemātikas uzlūkojumu, to mēģinot tikai saslāņot par procesu rekonstrukcijas mehānismiem, pie tam to darot ne gluži formālā vai daļēji formālā veidā.

Tālāk aplūkosim netradicionālu matemātisku vai drīzāk kognitīvu konstrukciju – Pitagora skaitļi. Pitagora skaitļi ir divu matemātisku jēdzienu pāris, kam pievienojam konstrukcija, kas viena jēdziena vērtības atveido otrā jēdziena vērtībās. Bieži varēsim teikt, ka Pitagora skaitļi ir pāris A, B, kur mums ir trešais elements – rep, kas A reprezentē kā B; tad varēsim teikt, ka <rep:A, B>. Bet ņemsim vērā, ka Pitagora skaitļi nav matemātiska definīcija, bet matemātiski kognitīva, ka šai konstrukcijai „jāstrādā" īpašā veidā, lai mēs to pieņemtu par funkcionējošu Pitagora skaitļu pāri vai Pitagora skaitļiem, runājot vienkāršoti.

Atkārtojam līdzīgu apgalvojumu kā iepriekš, bet ar citu nozīmi.

Matemātikā nav nekā cita kā Pitagora skaitļi.

To ieraudzīsim vēlāk. Bet lai minam kādus Pitagora skaitļu piemērus:

Slēgta līkne un vaļēja līkne, kur izvēlamies veidu, kā, teiksim, no vaļējas līknes iegūt slēgtu līkni. To varam izdarīt ļoti dažādos veidos un tātad šo varam uzlūkot kā labu piemēru Pitagora skaitļiem.

Rotācija un translācija. Process ir rotācijas pārveide translācijā, piemēram, cikloīda. Tehnikā tas ir auto, kur riteņu kustība pārvērsta auto paša kustībā pa virsmu. Procesam nav obligāti jāpārveido rotācija translācijā kādā acīmredzamā veidā, piemēram, kompleksā mainīgā funkciju gadījumā, kur kompleksā mainīgā funkcijas radiālā un argumenta daļas ir saistītas ar Košī Rīmaņa vienādībām kā nosacījumu funkcijas analītiskumam.

Komplekso skaitli varam uzlūkot kā likumu 0-vektora (imaginārās daļas) un 1-vektora (reālās daļas) savienojumam ar Eilera formulas palīdzību. Tad <kompleksais skaitlis: imaginārā daļa kā 0-vektors, reālā daļa kā 1-vektors>. Vēl viens ļoti labs piemērs Pitagora skaitļiem ir varietāte, kur tās funkcionalitāte tiek definēta tā, lai realizētu rotācijas pārveidi translācijā tajā telpā, ko definē varietāte. Varietāte citu neko arī nedefinē. Eilera telpā Pitagora skaitļi ir, piemēram, Dekarta koordinātes un polārās koordinātes, kuras savieno attiecīgā koordinātu transformācijas kārtula.

Cits Pitagora skaitļu piemērs ir hologramma un distinkcija, kā tos aplūko raksts (Zeps, Hologram and Distinction. The Physics of Time, 2008). Šis pāris vislabāk parāda, ka mūsu skatījumā Pitagora skaitļi ir kognitīva kategorija. Tradicionālākā skatījumā šis skaitļu pāris ir hologrāfiskais attēls un parastais attēls, kur tos savieno Furjē transformācija.

Ar Pitagora skaitļu palīdzību jācenšas raksturot pēc iespējas visas mums zināmās matemātiskās rekonstrukcijas, Lī algebras, Puasona iekavas, utt.

Visas augstāk aprādītās reprezentācijas varētu pretendēt uz Pitagora skaitļu piemēriem, bet tas vēl rūpīgi jāpārbauda. Atkārtosim, ka, lai Pitagora skaitļa pāri kā tādu ievestu, tam ir labi „jāstrādā". Praksē, ja šāda Pitagora skaitļu rekonstruēšana ieviestos, tad varētu kādu jēdzienu pāri pieņemt par Pitagora skaitļiem līdz brīdim, kad atklājam, ka kāds jaundefinēts pāris ir lietderīgāks un vispārīgāks par iepriekšējo. Ideāli būtu, ka mēs tiešām mācētu mūsu lietoto matemātiku izteikt ar Pitagora skaitļiem un tos izmantot, lai labāk pārskatītu mūsu veidotās matemātiskās konstrukcijas. Prakse var pārbaudīt apgalvojuma sakarīgumu: matemātikā nav nekā cita kā Pitagora skaitļi.

Literatūra:

Hall, B. C. (2003). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction.* New Yourk: Springer.

Petkovšek, M., Wilf, H. S., & Zeilberger, D. (1997). *A = B.*

Shabat, B. V. (1969). *Vvedenije v kompleksnij analiz. In Russian.* M.: Nauka.

Smolin, L. (2001). *Three Roads to Quantum Gravity.* New York: Basic Books.

Zeps, D. (2008). *Hologram and Distinction. The Physics of Tim,* http://www.ltn.lv/~dainize/idems.html

Zeps, D. (2008). *Matemātiskais prāts un kognitīvā mašīna,* http://www.ltn.lv/~dainize/idems.html

Zeps, D. (2007). *Classical and quantum self-reference systems in physics and mathematics,* http://www.ltn.lv/~dainize/MathPages/self.systems.pdf